Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Comunidad Valenciana 2020,
Convocatoria ordinaria

mentoor.es

Problema 1. Álgebra

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+az=1} \\ \boldsymbol{x+ay+z=1} \\ \boldsymbol{ax+y+z=-2} \end{cases}$ **siendo a un parámetro real, obtener razonadamente:**

a) **El estudio del sistema en función del parámetro a.**
b) **Las soluciones del sistema cuando a=-2.**
c) **La solución del sistema cuando a=0.**

Solución:

a) **El estudio del sistema en función del parámetro a.**

Para estudiar el sistema, aplicaré el Teorema de Rouché-Frobenius. Analizo el determinante de la matriz de coeficientes, A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1(a-1) - 1(1-a) + a(1-a^2) = a - 1 + a - 1 + a - a^3 = -a^3 + 3a - 2$$

Igualamos a cero para encontrar los valores críticos: $-a^3 + 3a - 2 = 0$. Usando Ruffini, las raíces son $a = 1$ (doble) y $a = -2$. La factorización es $|A| = -(a-1)^2(a+2)$.

Caso 1: $\boldsymbol{a \notin \{1, -2\}}$. $|A| \neq 0 \implies \mathrm{Rg}(A) = 3$. Sistema **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $\boldsymbol{a = 1}$. $|A| = 0$. La matriz A es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

La 1ª y 3ª fila son incompatibles. $\mathrm{Rg}(A) = 1, \mathrm{Rg}(A^*) = 2$. Sistema **Incompatible (S.I.)**.

Caso 3: $\boldsymbol{a = -2}$. $|A| = 0 \implies \mathrm{Rg}(A) < 3$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

La 3ª fila es la suma de las dos primeras multiplicada por -1. $\mathrm{Rg}(A^*) = 2$. Como $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A^*) = 2 < 3$, el sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

$$\boxed{\textbf{S.C.D. si } \boldsymbol{a \notin \{1, -2\}};\ \textbf{S.C.I. si } \boldsymbol{a = -2};\ \textbf{S.I. si } \boldsymbol{a = 1}.}$$

b) **Las soluciones del sistema cuando a=-2.**

Es un S.C.I. Usamos las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Restando (Ec1-Ec2): $3y - 3z = 0 \implies y = z$.
Sustituyendo $y = z$ en la primera: $x + z - 2z = 1 \implies x - z = 1 \implies x = 1 + z$.
Sea $z = \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{(x, y, z) = (1+\lambda, \lambda, \lambda)}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

c) La solución del sistema cuando a=0.

Es un S.C.D. con $|A| = -2$. Usamos la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{(x, y, z) = (1, 1, -1)}.}$$

Problema 2. Geometría

Sea la recta r $: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ **y los puntos** $P = (1, 0, 0)$ **y** $Q = (2, 1, \alpha)$.

a) **El valor de a para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.**
b) **La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando** $\alpha = 1$.
c) **La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando** $\alpha = 1$.

Solución:

a) **El valor de a para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.**
El vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$.
El vector de la recta que pasa por P y Q es $\vec{PQ} = (1, 1, \alpha)$.
Para que sean paralelas, sus vectores deben ser proporcionales:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{-1} \implies 1 = \frac{\alpha}{-1} \implies \alpha = -1.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = -1}.}$$

b) **La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando** $\alpha = 1$.
Para $\alpha = 1$, $Q(2, 1, 1)$.
El plano π contiene a P(1,0,0) y tiene como vectores directores a $\vec{PQ} = (1, 1, 1)$ y al vector director de r, $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies (x-1)(-2) - y(-2) + z(0) = 0$$

$$-2x + 2 + 2y = 0 \implies x - y - 1 = 0$$

$$\boxed{\textbf{El plano es } \boldsymbol{x - y - 1 = 0}.}$$

c) **La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando** $\alpha = 1$.
Para $\alpha = 1$, $Q(2, 1, 1)$. El plano π' es perpendicular a r, por lo que su vector normal es $\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r = (1, 1, -1)$. Su ecuación es $x + y - z + D = 0$.
Pasa por P(1,0,0): $1 + 0 - 0 + D = 0 \implies D = -1$. El plano es $\pi' : x + y - z - 1 = 0$.
La distancia de Q a π' es:

$$d(Q, \pi') = \frac{|2 + 1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{d(Q, \pi') = \frac{\sqrt{3}}{3}} \textbf{ unidades.}}$$

Problema 3. Análisis

Se da la función real definida por $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}}$.

a) **El dominio y las asíntotas de la función f.**
b) **La integral** $\boldsymbol{\int f(x)dx}$ **así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2,0).**
c) **El área de la región limitada por la curva** $\boldsymbol{y = f(x)}$ **y las rectas** $\boldsymbol{y = 0, x = 2, x = 4}$.

Solución:

a) **El dominio y las asíntotas de la función f.**

Dominio:
$x^2(x-1) = 0 \implies x = 0, x = 1.$ $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

A. Verticales:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{0} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

Hay asíntotas verticales en $x = 0$ y $x = 1$.

A. Horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \implies \text{A.H. en } y = 0$$

$$\boxed{\textbf{Dominio: } \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0, 1}\}. \textbf{ A.V.: } \boldsymbol{x = 0, x = 1}. \textbf{ A.H.: } \boldsymbol{y = 0}.}$$

b) **La integral** $\boldsymbol{\int f(x)dx}$ **así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2,0).**
Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

Resolviendo: $A = -2, B = -1, C = 2$.

$$\int \left(\frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right) dx = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + K$$

La primitiva $F(x)$ pasa por $(2, 0)$: $F(2) = -2\ln(2) + 1/2 + 2\ln(1) + K = 0 \implies K = 2\ln(2) - 1/2$.

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + 2\ln(2) - \frac{1}{2}}.}$$

c) **El área de la región limitada por la curva** $\boldsymbol{y = f(x)}$ **y las rectas** $\boldsymbol{y = 0, x = 2, x = 4}$.

La función es positiva en $[2, 4]$.
El área es la integral definida:

$$\text{Área} = \int_2^4 f(x)dx = \left[-2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1|\right]_2^4$$

$$= \left(-2\ln 4 + \frac{1}{4} + 2\ln 3\right) - \left(-2\ln 2 + \frac{1}{2} + 2\ln 1\right) = -4\ln 2 + \frac{1}{4} + 2\ln 3 + 2\ln 2 - \frac{1}{2} = 2\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\textbf{Área} = \mathbf{2\ln(3/2) - 1/4 \approx 0.5606\ u^2.}}$$

Problema 4. Álgebra

Se dan las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}}$ **que dependen del parámetro real b.**

a) **Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.**
b) **Los valores de b para que la matriz** $\boldsymbol{A^T A}$ **tenga inversa, siendo** $\boldsymbol{A^T}$ **la matriz traspuesta de A.**
c) **La inversa de** $\boldsymbol{A^T A}$, **cuando dicha inversa exista.**

Solución:

a) **Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.**

$$AB = \begin{pmatrix} -3+2b & 2b^2 & 0 \\ -b & 0 & -2b \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad |AB| = 0 \text{ para todo } b.$$

AB no tiene inversa para ningún valor de b.

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -b-3 & -4 \end{pmatrix}, \quad |BA| = 12 - 2(b+3) = 6 - 2b$$

$|BA| = 0 \iff b = 3$. **BA tiene inversa si** $\boldsymbol{b \neq 3}$.

$$\boxed{\textbf{AB nunca tiene inversa. BA tiene inversa si } \boldsymbol{b \neq 3}.}$$

b) **Los valores de b para que la matriz** $\boldsymbol{A^T A}$ **tenga inversa, siendo** $\boldsymbol{A^T}$ **la matriz traspuesta de A.**

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+b^2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$|A^T A| = 8(2+b^2)$. Esto es cero si $b^2 = -2$, lo cual no tiene solución real.

$$\boxed{\boldsymbol{A^T A} \textbf{ tiene inversa para todo } \boldsymbol{b \in \mathbb{R}}.}$$

c) **La inversa de** $\boldsymbol{A^T A}$, **cuando dicha inversa exista.**

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{8(2+b^2)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2+b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}.}$$

Problema 5. Geometría

Se dan el plano $\pi : 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(2, 1, 0)$.

a) **La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.**
b) **Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r.**
c) **La distancia entre el punto B y la recta r.**

Solución:

a) **La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.**
El plano π' contiene a A y B, y es perpendicular a π. Sus vectores directores son $\vec{AB} = (1, -1, 1)$ y el normal de π, $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$.

El vector normal de π' será $\vec{n}_{\pi'} = \vec{AB} \times \vec{n}_\pi = (0, 3, 3)$, que es proporcional a $(0, 1, 1)$.

La ecuación es $y + z + D = 0$. Pasa por A(1,2,-1): $2 - 1 + D = 0 \implies D = -1$.

$$\boxed{\textbf{El plano es } \boldsymbol{y + z - 1 = 0}.}$$

b) **Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r.**

La recta r pasa por A y su vector director es $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$.

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}}$$

De la forma continua $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$, obtenemos los planos:
$x - 1 = 2(y - 2) \implies x - 2y + 3 = 0$.
$-(y - 2) = z + 1 \implies y + z - 1 = 0$.

$$\boxed{\textbf{Planos: } \boldsymbol{\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}}.}$$

c) **La distancia entre el punto B y la recta r.**
Usamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta: $d(B, r) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$.
$\vec{AB} = (1, -1, 1)$, $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$.

$$\vec{AB} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 3, 3)$$

$$d(B, r) = \frac{\sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\textbf{La distancia es } \boldsymbol{\sqrt{3}} \textbf{ unidades.}}$$

Problema 6. Análisis

En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

a) **La expresión del área A(x) del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.**
b) **Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función A(x), $0 \leq x \leq 20$.**
c) **La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.**

Solución:

a) **La expresión del área A(x) del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.**

La altura h sobre el lado desigual x divide el triángulo en dos triángulos rectángulos.
Por Pitágoras:

$$h^2 + (x/2)^2 = 10^2 \implies h = \sqrt{100 - x^2/4}$$

El área del triángulo es $A(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$.

$$\boxed{\boldsymbol{A(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}.}}$$

b) **Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función A(x), $0 \leq x \leq 20$.**

Para facilitar la derivación, podemos optimizar $g(x) = A(x)^2$, ya que el área es positiva.

$$g(x) = \frac{x^2}{16}(400 - x^2) = 25x^2 - \frac{x^4}{16}$$

$$g'(x) = 50x - \frac{4x^3}{16} = 50x - \frac{x^3}{4}$$

$g'(x) = 0 \implies x(50 - x^2/4) = 0$. Soluciones: $x = 0$ (extremo del intervalo) y $x^2 = 200 \implies x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Estudiamos el signo de $g'(x)$ (y por tanto de $A'(x)$) en el dominio $[0, 20]$.

Intervalo	$(0, 10\sqrt{2})$	$(10\sqrt{2}, 20)$
Signo $A'(x)$	$+$	-
$A(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘

$$\boxed{\textbf{Creciente en } (0, 10\sqrt{2}) \textbf{ y decreciente en } (10\sqrt{2}, 20).}$$

c) **La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.**

Del estudio de monotonía, el máximo se alcanza en el punto crítico $x = 10\sqrt{2}$.

La longitud del tercer lado es $x = 10\sqrt{2}$ cm.

El área máxima es:

$$A(10\sqrt{2}) = \frac{10\sqrt{2}}{4}\sqrt{400-(10\sqrt{2})^2} = \frac{10\sqrt{2}}{4}\sqrt{400-200} = \frac{10\sqrt{2}}{4}\sqrt{200} = \frac{10\sqrt{2}}{4}(10\sqrt{2}) = \frac{100\cdot 2}{4} = 50$$

$$\boxed{\textbf{La longitud es } \boldsymbol{x = 10\sqrt{2}} \textbf{ cm. El área máxima es 50 cm}^{\mathbf{2}}\textbf{.}}$$